



TITLE:

# Graph KnotsのDehn Surgery (結び目理論)

AUTHOR(S):

上, 正明

---

CITATION:

上, 正明. Graph KnotsのDehn Surgery (結び目理論). 数理解析研究所講究録 1981, 442: 82-97

ISSUE DATE:

1981-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102845>

RIGHT:

# Graph knots の Dehn surgery

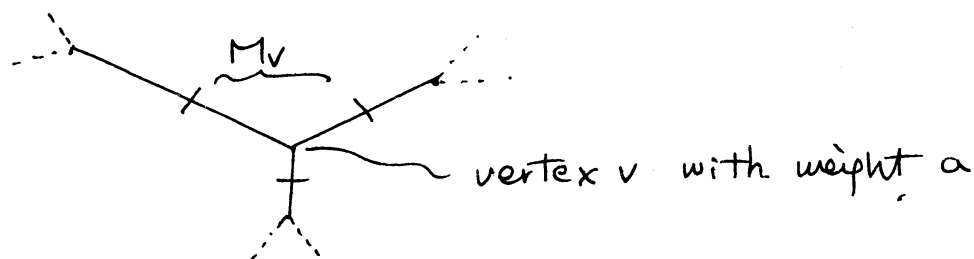
東大 理 上 正明

complement  $X$  が graph manifold  $(X, T)$  であるような knot を graph knot と呼ぶ。この時  $X-T$  の各 component は punctured  $S^2$  上の  $S^1$ -bundle になる (cf. [3]). ので, plumbed diagram で表わすことがわかる (§2)。そこで逆に plumbed diagram で表わされる 3-manifold を, 特に Seifert fibered space になる場合を中心に考えることにする。

## §1. Reduced plumbed diagram

$\Gamma$ : を 整数係数の weight をもつ graph (edge 上の weight は  $\pm 1$ ) とする。このとき  $\Gamma$  には 4-manifold of plumbing type  $P_\Gamma$  が対応する。各 vertex  $v_i$  には euler number  $a_i$  の  $S^2$  上の  $D^2$ -bundle  $p_i$ , vertex  $v_i, v_j$  を結ぶ edge  $e$  (weight of  $e = \varepsilon = \pm 1$ )

には、対応する 2 つの  $S^2$  上の  $D^2$ -bundle の (自然な向きによ  
る) intersection number =  $\epsilon$  なる plumbing が対応する。  
 $M_P = \partial P_P$  とおくと、 $M_P$  は自然に graph manifold になる。  
その graph structure を  $(M_P, T)$  とおくと、 $M_P - T$  の各  
component の closure は punctured  $S^2$  上の  $S^1$ -bundle  
であるが、その boundary component 上に次のような座標  
(peripheral system) を定めておく。



vertex  $v$  with weight  $a$  に対応する piece  $M_v$  は  
上図の部分に相当し、その構成は次の通り。

$v$  の valency ( $v$  から出る edge の数) を  $r$ ,  $B_r$  を  
 $r$ -punctured  $S^2$  とする。  $B_r \times S^1$  の  $i$  番目の boundary  
component  $\partial_i B_r \times S^1$  に  $q_i = \partial_i B_r \times *$ ,  $h_i = * \times S^1$  なる 2  
つの loop によって座標を入れる。一方  $B_r$  の内点の近傍  
 $D_0^2$  をとり、  $\partial D_0^2 \times S^1$  の座標を、  $q_0 = \partial D_0^2 \times *$ ,  $h_0$  によって定  
める。(但し、  $q_i$  に、  $\sum_{i=0}^r q_i \sim 0$  in  $B_r - \text{int } B_0$  なるように向

きを入れ子。その他の向きはすべて自然な向きとする。)

このとき、

$M_v \cong (\text{Pr-int } D_0^2) \times S^1 \not\cong D^2 \times S^1$ ,  $f: \partial D_0^2 \times S^1 \rightarrow \partial D^2 \times S^1$   
 は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  で表わされる homeo. (但し、ここで  $\partial D_0^2 \times S^1$  には  $\{ -q_0, h \}$  によって向きを入れる。)

また、vertices  $v, v'$  が weight  $\varepsilon$  の edge  $e$  で結ばれているときは  $M_v$  と  $M_{v'}$  は  $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$  なる homeo  $\partial_1 M_v \rightarrow \partial_1 M_{v'}$  で attach される。(ここで edge  $e$  が  $M_v, M_{v'}$  のそれぞれれの1番目の boundary component に対応するとした。)

以下 boundary のある graph も考え、各 boundary は  $\Gamma$  の形で表わし、対応する  $M_\Gamma$  の boundary component には上記の通り "canonical coordinate"  $\{q, h\}$  を固定しておく。

Proposition 1. 次の (i), (ii) は同値。

- (i):  $M^3$  は  $M-\Gamma$  の各 component の closure が punctured  $S^2$  上の  $S^1$ -bundle たる graph manifold  $(M, \Gamma)$  の構造をもつ。
- (ii). ある plumbed diagram (integrally weighted graph)  $\Gamma$  が存在して、 $M^3 \cong M_\Gamma$

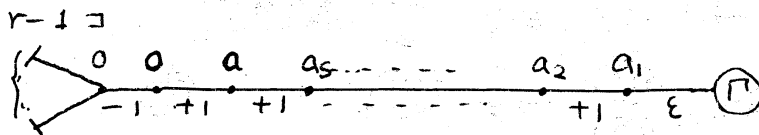
(i) (ii)  $\Rightarrow$  (i) は明らか。

(i)  $\Rightarrow$  (ii) は 次の事実による。

$M_\Gamma$  を  $\Gamma$  に対応する graph manifold. (左端の boundary は  $\partial M_\Gamma$  に対応するとする。) このとき

$$M = M_\Gamma \cup_g Br \times S^1; \quad g = \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}: \partial(Br \times S^1) \xrightarrow{\cong} \partial M_\Gamma$$

( $s, t, u, v$  は  $sv - tu = 1$  なる整数) は次の graph で表わされる。



$$\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u/v = a_1 - 1/a_2 - 1/\cdots - 1/a_s = [a_1, a_2, \dots, a_s].$$

$$\epsilon = \pm 1.$$

(但し  $Br \times S^1$  が  $M_\Gamma$  の一部に組み込まれている場合は cycle をもつ graph として上と同様にかける。)

$M_\Gamma$  は  $\Gamma$  の vertex の weight が有理数でも定義される。

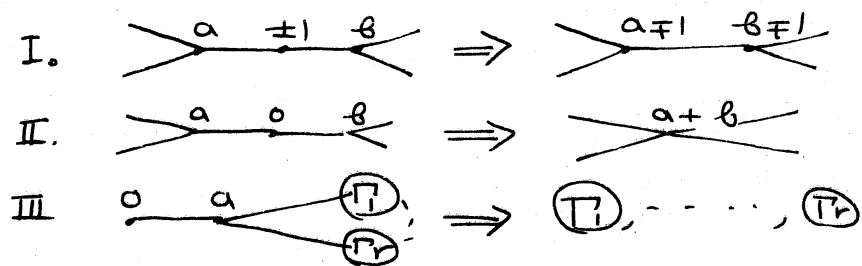
よく知られている様に,

$$\textcircled{1} \xrightarrow{P/q} = \textcircled{1} \xrightarrow{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$P/q = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

そこで上記の case のみ 簡単の為 有理数の weight で表わすことにする。また特に断わりない限り graph は tree とする。(この時は edge の weight に よらない。)

定義. (integrally weighted) graph  $\Gamma$  が reduced とは. 次の 3 つの reduction process がこれ以上適用できない graph をいう。



上記の I ~ III は対応する  $M_\Gamma$  の homeo type をかえない。

Theorem 1.  $\Gamma$  を <sup>connected</sup> reduced weighted tree とする。

このとき次の 2 つ は 同値

(i).  $M_\Gamma \approx$  Seifert manifold of type  $\Theta_1$ .

(即ち. orientable Seifert manifold with an orientable orbit space.)

(ii).  $\Gamma$  の multiple vertex (即ち valency  $\geq 3$  の vertex) の数は高々 1.

① (ii)  $\Rightarrow$  (i) は明らか。(  $\Gamma$  reduced であることに注意)。 (i)  $\Rightarrow$  (ii) は次の Lemma から従う。

Lemma.  $\Gamma$ . <sup>connected</sup> reduced. weighted tree. とする。

もし、 $\Gamma$  の multiple vertex の数  $\geq 2$  ならば、 $M_\Gamma$  は incompressible torus をもち、 $\pi_1 M_\Gamma$  は rank 2 の free abelian group を proper subgroup にもつ。さらに  $\pi_1 M_\Gamma$  は centerless。

Lemma の証明は次のように  $M_\Gamma$  に対する初等的考察を積み重ねて行なわれる。

1°  $\Gamma$ : connected reduced graph. で  $M_\Gamma \neq \emptyset$  とする。  
このとき、 $M_\Gamma$  は irreducible。

2°  $\Gamma$ : 1° と同じ。さらに、 $M_\Gamma \cong B^2 \times S^1$  とする。  
このとき、 $\Gamma$  は linear. (即ち multiple vertex なし。)

3°  $\Gamma$ : 1° と同じ。このとき、 $M_\Gamma$  の各 boundary component は incompressible にあるか。又は  $M_\Gamma$  は solid torus になる。

1°, 2° はともに  $\Gamma$  の multiple vertex の数に関する induction で示される。multiple vertex の数  $\leq 1$  のとき

1. Seifert manifold with boundary  $\partial M$  irreducible であること, fibered solid torus の exceptional fiber  $\partial M$  の高々 1 であることから従う。3° は 1°, 2° の Corollary.

同時に次のこともわかる。

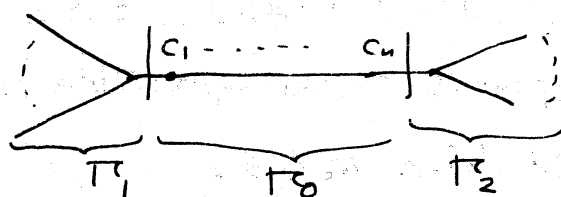
4°  $\Gamma$ : (not necessarily reduced) connected graph とし。  $M_\Gamma$  が not irreducible ならば次のいずれかが成立。

1)  $M_\Gamma$  は non-prime で、 $\Gamma$  は disconnected graph に reduce できる。

2)  $M_\Gamma = S^2 \times S^1$  で  $\Gamma$  は  $\cdot^0$  に reduce できる。

(4° は  $\partial M_\Gamma = \emptyset$  でも  $\partial M_\Gamma \neq \emptyset$  でもよい)

Lemma の証明の outline. # multiple vertices of  $\Gamma = 2$  のとき示す。(一般の場合は inductive に示される)  
 $\Gamma$  を次のように分割。



このとき、 $M_{\Gamma_1}$ ,  $M_{\Gamma_2}$  は Seifert manifold with boundary.  $\partial M_{\Gamma_i}$  の canonical coordinate を  $\{\theta_i, h_i\}$  とする。( $i=1, 2$ ).  $M_{\Gamma_0} \approx T^2 \times I$



$1^0 \sim 3^0$  により. ( $T_1, T_2$  に multiple vertex があるから)

$\pi_1(M_{T_j}) \rightarrow \pi_1(M_{T_j})$  は injective. (しかも not onto なること)  $(j=1, 2)$

ることが容易に示される。このとき  $\pi_1 M_T \cong \pi_1 M_{T_1} *_{\mathbb{Z}^2}$

$\pi_1 M_{T_2}$ .. ここで amalgamated subgroup  $\mathbb{Z}^2$  は  $M_{T_0} \cong T^2 \times I$

に対応する homeo.  $\varphi: M_{T_1} \xrightarrow{\sim} M_{T_2}$  と上記の inclusion

から引き起こされる写像により amalgamate される。

一方 combinatorial group theory の初等的事実により

$$\text{center}(\pi_1 M_T) \cong \text{center} \pi_1 M_{T_1} \cap \text{center} \pi_1 M_{T_2} \cap \mathbb{Z}^2$$

(ここで  $\mathbb{Z}^2, \pi_1 M_{T_2}$  は自然に  $\pi_1 M_T$  の部分群とみなす.)

$$\text{center}(\pi_1 M_j) = \langle h_j \rangle \cong \mathbb{Z} \quad (j=1, 2) \quad \text{だから} \quad \text{center} \pi_1 M_T$$

≠ φ ならば φ は  $h_1$  を  $\pm h_2$  に写さねばならない。この時

容易にわかるように  $[c_1, \dots, c_n] = 0$ 。このとき  $T_0$  の

部分 I, II により reduce されねばならない。

Remark.1  $M_T$  が lens space ( $S^2 \times S^1, S^3$  を含む)

のとき reduced graph が linear なることは von Randow

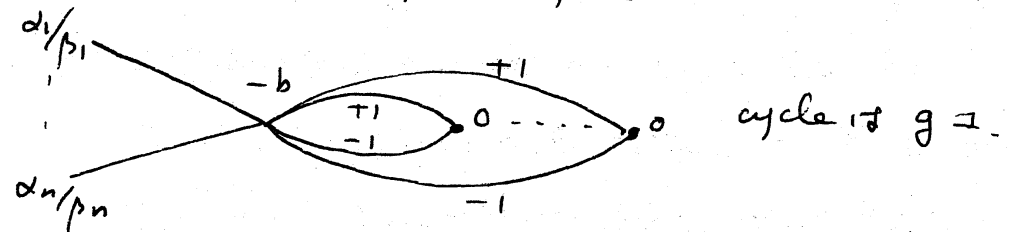
Wagreich, Scharf [5] により考察されている。但しこの方

法は  $\pi_1 M_T$  が solvable なる  $\Gamma$  を決めるもので。上記の場合

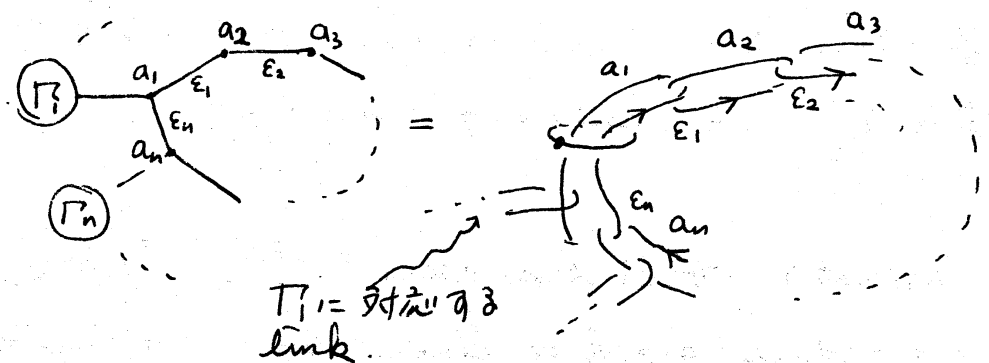
以外の Seifert manifold には適用できない。上記のことは

Lemma から自然に証明される。

Remark 2.  $M$  は Seifert of type  $\emptyset$  のとき。  
 この type は orbit surface の genus = 0 のものに限る。  
 しかし cycle をもつ graph の場合はこの限りではない。例  
 えば  $\{b, (\alpha_1, g), (\alpha_1, p_1), \dots, (\alpha_n, p_n)\}$  は Seifert  
 manifold は次の graph でかける。



この様な cycle をもつ graph は次の process で framed  
 link に書き直すことができる。



$\epsilon_i$  は、右図では linking number を表わす。

この observation により次の proposition が示される。

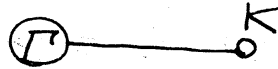
Proposition 2. Borromean rings 上の各 component 上  $r, s, t \in \mathbb{Q}$  で Dehn surgery をして得られる manifold を  $B(r, s, t)$  とかく。このとき、 $B(0, s, t)$  は graph manifold,  $B(0, 0, t)$  は Seifert manifold で "orbit space  $\approx T^2$ , exceptional fiber は高々 1 本,

$$(*) \quad B(0, s, t) = \begin{array}{c} \xrightarrow{+1} \\ s \text{ --- } \text{---} \text{---} t \\ \xleftarrow{-1} \end{array}$$

$M_\Gamma$  が Seifert manifold of type  $n_2 (= \text{orientable Seifert manifold with an nonorientable orbit space})$  の構造をもつ場合の reduced tree  $T$  も決定される。(weight は限らずしも一意的ではない)。これは、Waldhausen の定理 [6] による。即ち、 $M_\Gamma$  の自然な graph structure と Seifert of type  $n_2$  の自然な graph structure に "Waldhausen の意味の" reduction process を適用して structure を比較する。若干の例外的 case は Theorem 1 により  $T$  は決定される。(詳細は略す)。

## §2. graph knot の representation

Proposition 1 により graph knot  $K \subset S^3$  は次のような plumbed diagram  $\tau$  によって (cf. [3])



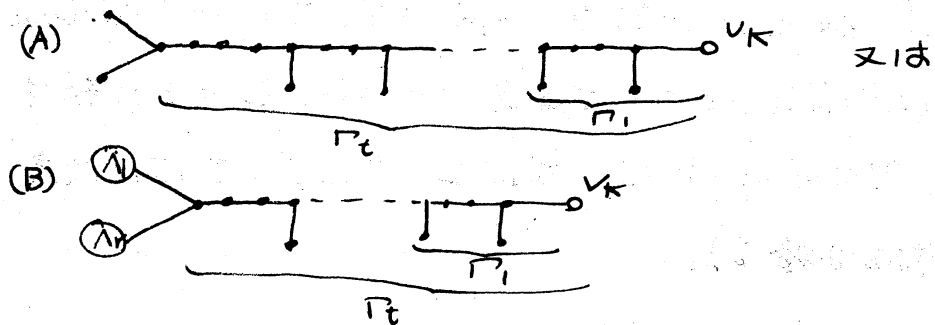
(i)  $\Gamma$  は tree

(ii)  $M_\Gamma \cong S^3$

$\Gamma$  は tree であるから  $\Gamma$  の edge の weight には  $\pm 1$  しかない。  
一方  $K$  の orientation は  $\Gamma$  と  $K$  を結ぶ edge に weight  $\pm 1$  を与えることによって示される。

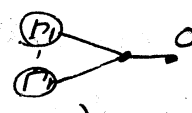
Proposition 3.  $\Gamma$  connected graph.  $M_\Gamma \cong S^3$  ならば  $\Gamma$  の multiple vertex に対して reduce されない枝の数は高々 2 個。 (cf. [3]) linear な

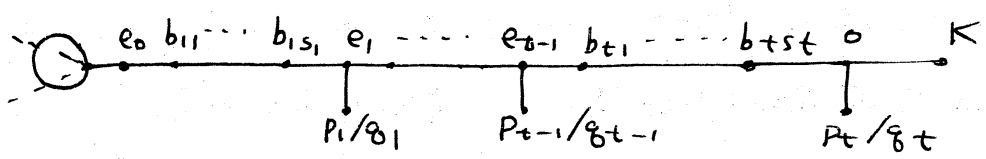
これを使って  $\Gamma \text{---} K$  は次の様に reduce される。



(A), (B) ともに  $\Gamma_t$  は  $K$  を無視すれば linear graph に reduced. (A) の場合  $K$  を無視すれば  $\Gamma_1$  は  $\text{>}$

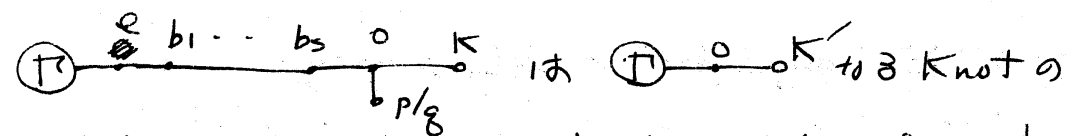
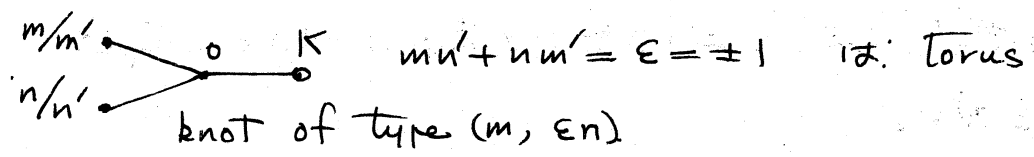
//

に reduce する。(B) の場合は  に reduce する。  
 かつ特に  $M_{\mathbb{R}} \cong S^3$  (reduction III)。さらに適当な graph  
 の変形 (Kirby-Rolfsen twist に相当する) で weight を  
 変換すると (A), (B) とともに

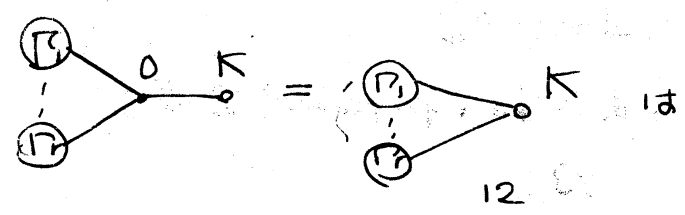


$$[b_{k1}, \dots, b_{ks_k}, 0, p_k/q_k] = 1/e_{k-1} \quad (\forall k)$$

となる。次のことに注意する。(cf. [1])



winding number =  $p$ . linking number =  $\delta x + p\psi$ .  
 の cable knot を表わす。(但し  $[b_s, \dots, b_1] = x/x'$ ,  
 $xq + px' = \delta = \pm 1$ .  $\psi$  は  $K$  の真の longitude と  $x$  かけ  
 の longitude との linking number.) 勝手な cable  $p$  にの  
 形に書けることは容易に示される。



knots  $\bigcirc \text{---} K$  の connected sum.

最後の表示は一般に edges の weight (即ち  $K$  の orientation) によって異なるが、次の事から、<sup>それは</sup> 不要であることがわかる。

次の事が知られている。(cf. [2])

★: graph knot は torus knots ~~を~~ <sup>から出発して</sup> cabling, connected sum を有限回くり返すことにより、得られる。

★は上記の様に plumbing から出発して構成的に示すこともできる。特に induction はより、graph knot は invertible. 従って上の3番目の表示は edge の weight によらない。

### §3. graph knot の Dehn surgery.

graph knot  $K$  を §2 のような plumbed diagram で表わし、(1つの表示を fix).  $K$  に対して適当な有理数  $p/q$  を与えれば、 $K$  の Dehn surgery により、得られる 3 manifold になる。(みかけの係数と真の surgery coefficient には §2 の  $\psi$  に対応してずれがある。 $\psi$  は §2 における standard の表示に対しては容易に計算される)

$\bigcirc \text{---} p/q = \Gamma(p/q)$  と表わす。(graph knot  $\bigcirc \text{---} K$ )

Theorem 1 において  $\Gamma(p/q)$  の reduction process を調べればいい。Seifert manifold (of type  $\alpha_1$ ) になるかが決まってくる。定性的には次の事がいえる。

Theorem 2. graph knot  $K$  上の Dehn surgery で Seifert manifold がえられるのは、 $K$  は高々 2 回の iterated cable of a torus knot. 又は 2 つの torus knot の connected sum.

より詳しく knot type surgery coefficient, えられる Seifert manifold の type も決定可能。C. Gordon [2] により異なる方法で似た結果が得られている。iterated torus knot については「簡単な計算で」[2] と同じ結果がえられる。(詳しい値は [2] に譲る。) 一方、それ以外の graph knot については、Dehn surgery が  $\infty$  と incompressible torus をもつ graph manifold が得られること [2] で示されているが、この中で Seifert manifold になる case が唯一種類のみ存在すること [2] が Theorem 1 を使うことでの方法でわかる。それは、2 つの torus knot の connected sum の case で、得られるのは丁度 4 つの exceptional fiber をもつ Seifert manifold である。その graph は次の通り。

$$\begin{array}{c} \frac{m}{m'} \\ \swarrow \\ 0 \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \frac{m}{m'} \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \frac{m}{m'} \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} = T(m, n) \# T(\tilde{m}, \tilde{n})$$

得られる Seifert manifold は

$$\begin{array}{c} \frac{m}{m'} \\ \swarrow \\ 0 \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \frac{m}{m'} \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \frac{m}{m'} \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} = \begin{array}{c} \frac{m}{m'} \\ \swarrow \\ 0 \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{m}{m'} \\ \swarrow \\ 0 \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array}$$

Remark. Theorem 2 は Seifert manifold of type  $n_2$  についても有効。

Remark. Fintushel と Stern による iterated torus knot の Dehn surgery で "lens space" がえられる場合は自然に上記の結果に合致する。(cf. [1]) ここでの方法は [1] の方法の拡張であり、計算方法は基本的に同一である。(本質的には Theorem 1 が異なるところである。)

また同様の計算と Lemma の証明中考察した事実により、次の定理も導かれる。

Theorem 3. graph knot 上の Dehn surgery で "non-prime manifold  $M_1 \# \cdots \# M_r$  ( $M_i$  は  $\neq S^3$  なる prime component) が得られるとする。このとき、 $r \leq 2$ 。さらに少なくとも 1 つの component は lens space。



## References

- [1] R. Fintushel and R. J. Stern; Constructing lens spaces by surgery on knots, Math. Z 175 (1980) 33-51.
- [2] C. McA. Gordon. Dehn surgery and satellite knots preprint.
- [3] M. Kato. A note on graph links. (数理解析研究會)
- [4] L. Moser. Elementary surgery along a torus knot. Pacific. J. Math. 38 (1971) 737-745
- [5] A. Scharf. Faserungen von Graphenmannigfaltigkeiten. Bonn. Math. Schriften, No. 93. (1974)
- [6] F. Waldhausen, Eine klasse, von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I, II, Inv. Math. 3 (1967) 308-333  
4. (1967) 87-117.
- [7] M. Ue. Some remarks on Dehn surgery along graph knots. preprint.